

196: Série de Fourier. Exemples et applications

Plan:

I. Autours des séries de Fourier

a) Résultats préliminaires [ELAM]

def $\mathbb{T}_{\mathbb{T}}$ + def Banach + rmq sur périodicité $p \cdot p$ + def $L^p_{\mathbb{T}}$ + $(L^p_{\mathbb{T}}, \|\cdot\|_p)$ complet + $p = \infty$ $L^p_{\mathbb{T}}$ dual dans $\mathbb{T}_{\mathbb{T}}$ + rmq $L^p_{\mathbb{T}}$ Hilbert $p = 2$ [ELAM]

b) Coefficients et série de Fourier [ELAM]

def e_n + def pol. trigo + en famille orthogonale + def $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$ + def produit convol + ppt sur c_n + Riemann-Lebesgue + $f \mapsto (c_n(f))$ morphisme d'algèbre continue + def $a_n(f)$ et $b_n(f)$ + def $\sum$ Fourier + def S_N + thm 3.2.1: si $\sum a_n e^{-in\theta}$ cv ... p. 172-178 [ELAM]

II - Convergence des séries de Fourier

a) Noyau de Dirichlet et Féjer [ELAM] [GOU]

def D_n + D_n paire + $D_n = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}$ + $S_N(f) = f * D_N + \|D_N\| = \frac{4}{\pi^2} \ln N + O(1)$ p. 181-185 [ELAM]

def K_n + $K_n = \sum_{k=0}^n (1 - \frac{k}{n}) f_k$ + $G_N(f) = f * K_N \rightarrow f$ approx unité p. 185-186 [ELAM]

def cv Cesàro + si $u_n \rightarrow P$ alors $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^N u_k \rightarrow P$ + si S_N cv $\Rightarrow G_N$ cv p. 181-182 [ELAM]

Banach Steinhaus + série de Fourier dv p. 474-485 [GOU] DEV 1

b) Le théorème de Féjer et ses conséquences [ELAM]

thm de Féjer + rmq sur densité pol. trigo + thm de Weierstrass + formule de Fejér + si $f \in C_{\mathbb{T}}$ et $(S_n(f))$ cv ... + si $f \in C_{\mathbb{T}}$ et $e^{ipm} = o(m)$ p. 180-185 [ELAM]

ordre de grandeur des coef. de P pour p. 201 [ELAM]

$c_n(f) = c_n(g) \Rightarrow \dots$ - thm Dirichlet p. 193-196 [ELAM]

III - Applications des séries de Fourier

a) calcul de séries [GOU] [ZQ]

$\cos t$ + $\cos 2t$ p. 272 [GOU]

fonction signal p. 95 [ZQ]

b) Formule sommatoire de Poisson [GOU]

Problème p. 289 [GOU]

c) Équation de la chaleur [ZQ]

eq. chaleur existence + unicité p. 110 [ZQ] DEV 2

Références:

[ELAM]: EP Amrami, Analyse de Fourier

[ZQ]: Zviq. Queffelec, Analyse pour l'agreg

[GOU]: Goursat, Analyse (3ed)

Commentaires:

- Il faut bien savoir tout redémontrer ce qui est autour de Féjer.

- Se servir de dev 1 en remontrant, en mode "à l'aide de Banach Steinhaus on veut que la continuité ne suffit pas..."